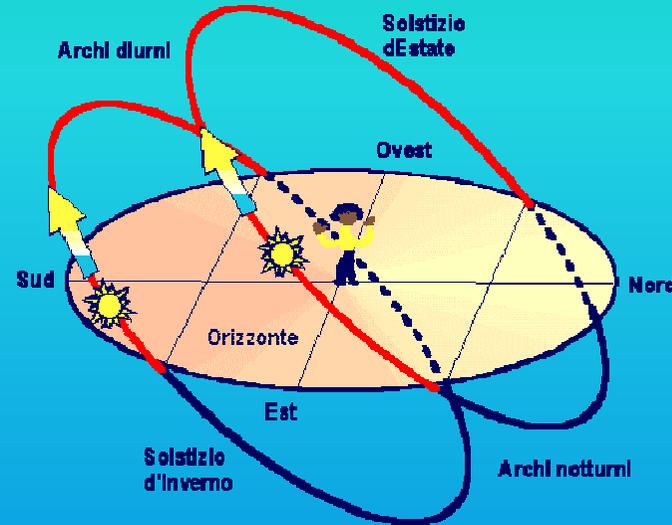


Percorso diurno-notturno del sole



ACA = gruppo teorico

15 GIUGNO 2012

a cura di: **giuseppe giliberto**



giuseppelb40@gmail.com

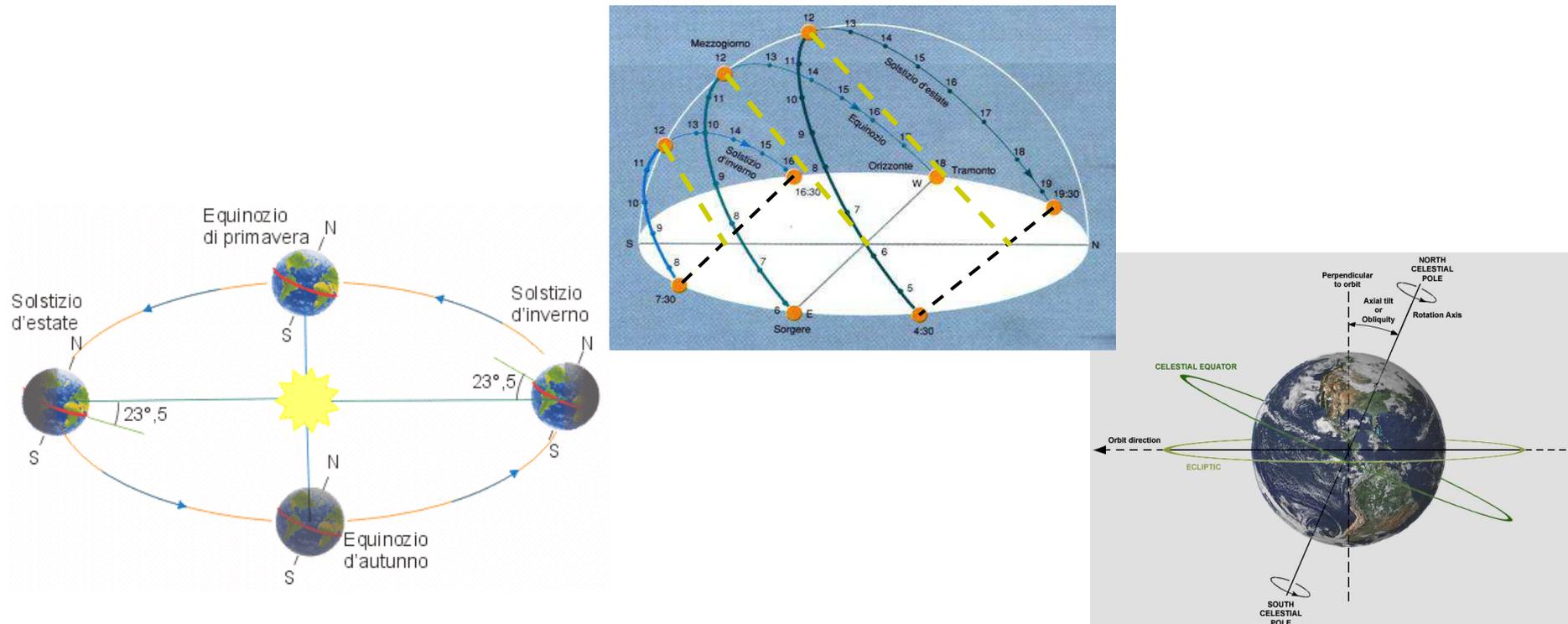
Introduzione

E' abbastanza noto a tutti, esperti astronomi, astrofili e a chi si è personalmente documentato, che la conformazione del sistema solare comporta una specifica **“relazione”** tra il sole e i suoi pianeti.

Questa relazione è determinata dalle orbite descritte da ciascun pianeta attorno al sole, moto di **rivoluzione**, e dal moto di **rotazione** che ciascun pianeta effettua intorno al proprio asse (V. figure seguenti).

La nostra attenzione è rivolta in particolare alla relazione esistente fra **Terra e Sole** che comporta il moto di rivoluzione secondo un'orbita ellittica (**eclittica**), l'inclinazione **dell'asse di rotazione** della terra di **23,5 gradi** sul piano dell'eclittica, l'alternarsi delle **stagioni**, l'alternarsi del **giorno e della notte** con la variazione della loro durata durante l'anno.

E' naturale quindi chiedersi, principalmente, quale è e come varia l'ora del **sorgere**, del **tramonto** e la **culminazione** del sole durante l'anno; come varia durante il giorno **l'altezza**, **l'angolo orario** e **l'azimuth** del sole con riferimento ad un **orizzonte locale**.



Questo comporta una attenta analisi **geometrico-matematica** della relazione fra terra e sole per determinare le formule che permettono di eseguire i calcoli relativi.

Generalmente su Internet si possono trovare queste formule che vengono, però, presentate senza la dovuta dimostrazione che i più curiosi desiderano verificare; si trovano anche calcolatori on-line per determinare i valori di interesse. Anche i simulatori astronomici (planetari) si prestano a questo scopo.

Lo scopo di questa nota è proprio quello di cimentarsi nell'analizzare, dimostrare e ricavare queste formule; insomma un piccolo esercizio matematico.

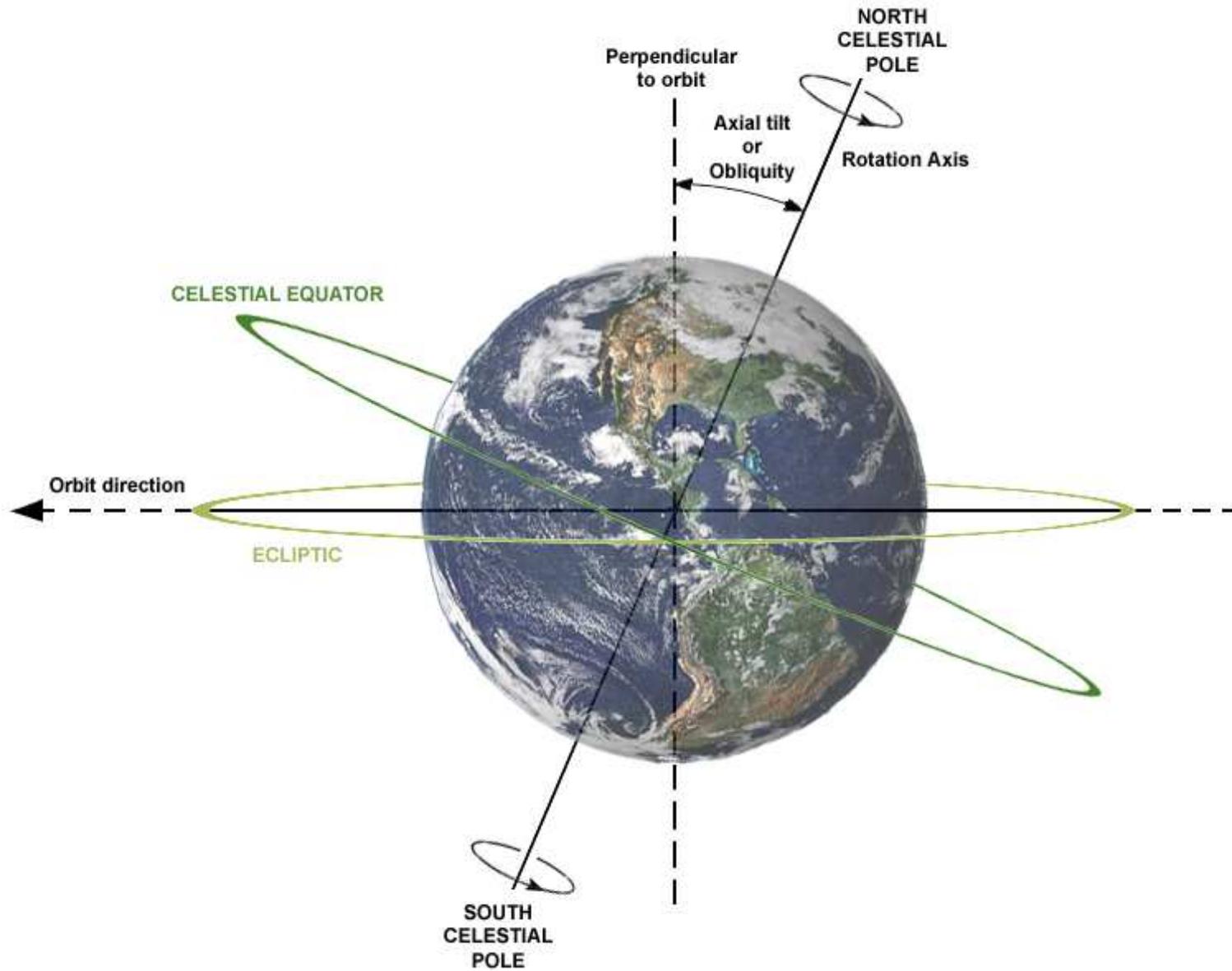
Quindi questo documento viene presentato con disegni disponibili e prelevati da internet ma elaborati opportunamente allo scopo di poter eseguire analisi matematiche per ottenere le formule relative a determinare i valori di interesse. Il lettore tuttavia è invitato a rendersi conto della dimostrazione con spirito critico.

Vengono eseguiti due approcci diversi, chiamati **Analisi matematica n.1** ed **Analisi matematica n.2** con cui eseguire le analisi geometrico-matematiche, che portano a ricavare formule diverse ma che, nei calcoli, danno gli stessi risultati che saranno confrontati fra di loro e, a loro volta, con i valori forniti da un simulatore astronomico, come HNSKY o Starry Night.

I calcoli sono eseguiti tramite Excel e si trovano in fogli non contenuti in questo documento; sono invece riportati i valori calcolati ed i grafici relativi del confronto che danno ragione della corretta analisi eseguita e dei risultati ottenuti.

Bisogna, però, precisare che l' **Analisi matematica n.1** è stata pensata, elaborata, dimostrata e formulata dall'autore prima che venisse a conoscenza dell' **Analisi matematica n.2** che, invece, si riscontra diffusamente nella documentazione ufficiale su internet anche se non dimostrata.

L'approccio alle due analisi è diverso, essendo la prima riferita principalmente all'arco notturno (compreso e limitandosi fra levata **L** e tramonto del sole **T**) mentre la seconda all'arco diurno e quindi più dettagliata riguardo ai parametri presi in esame (v. figure 2,3,4,5).



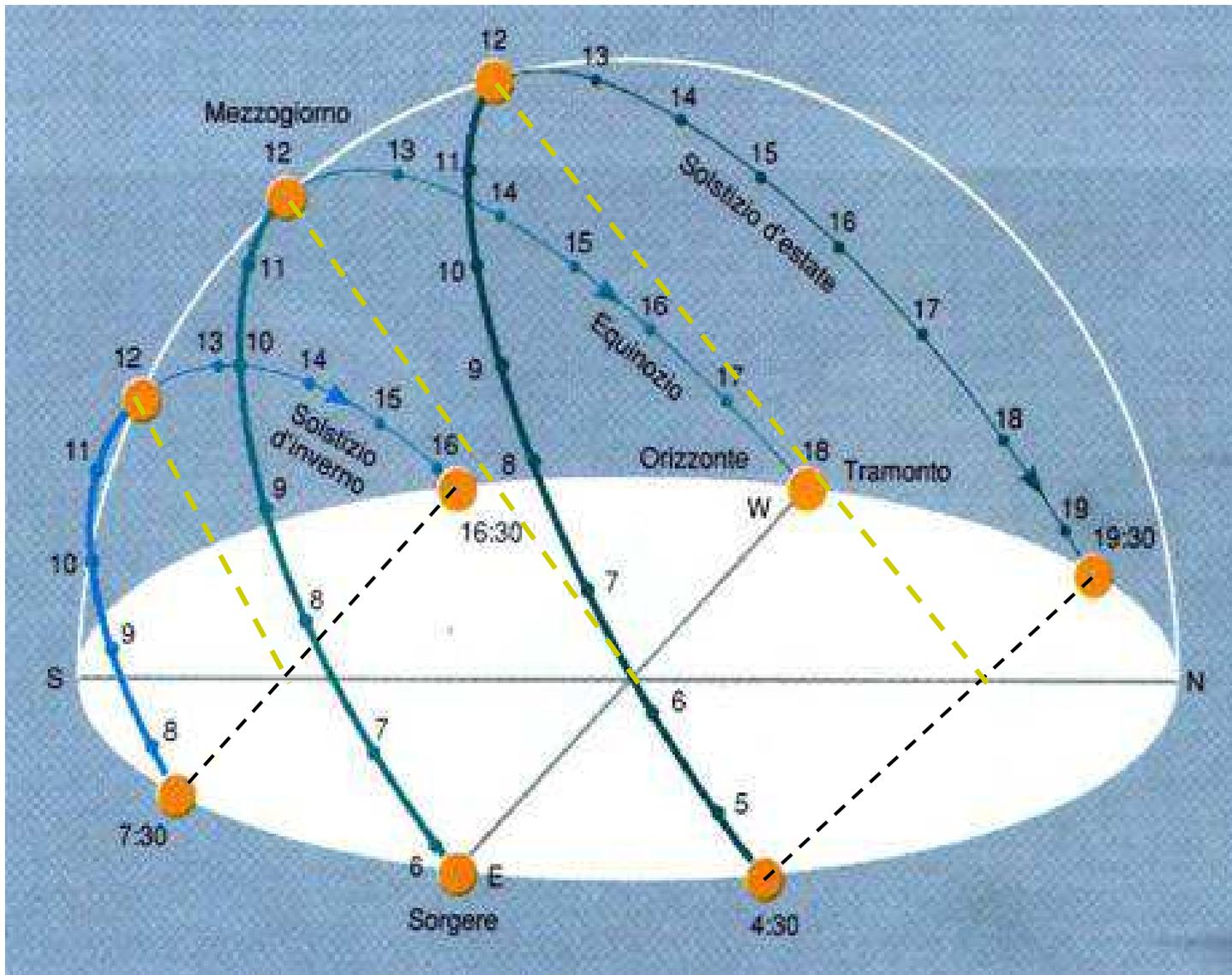


Figura 1 Archi diurni del sole su un orizzonte locale nei quattro eventi principali dell'anno: Solstizio d'Inverno, Equinozio di Primavera, Solstizio d'Estate, Equinozio d'Autunno.

Relazione fra Orizzonte Locale e Declinazione del Sole.

Punti di Levata, Culminazione e Tramonto del Sole.

Z = declinazione del sole

λ = latitudine locale

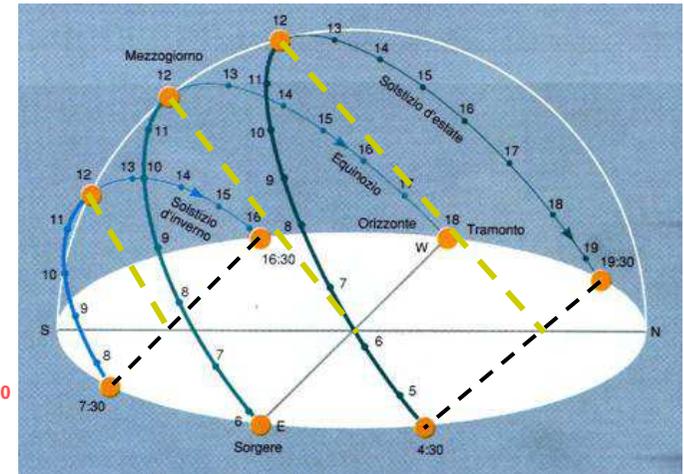
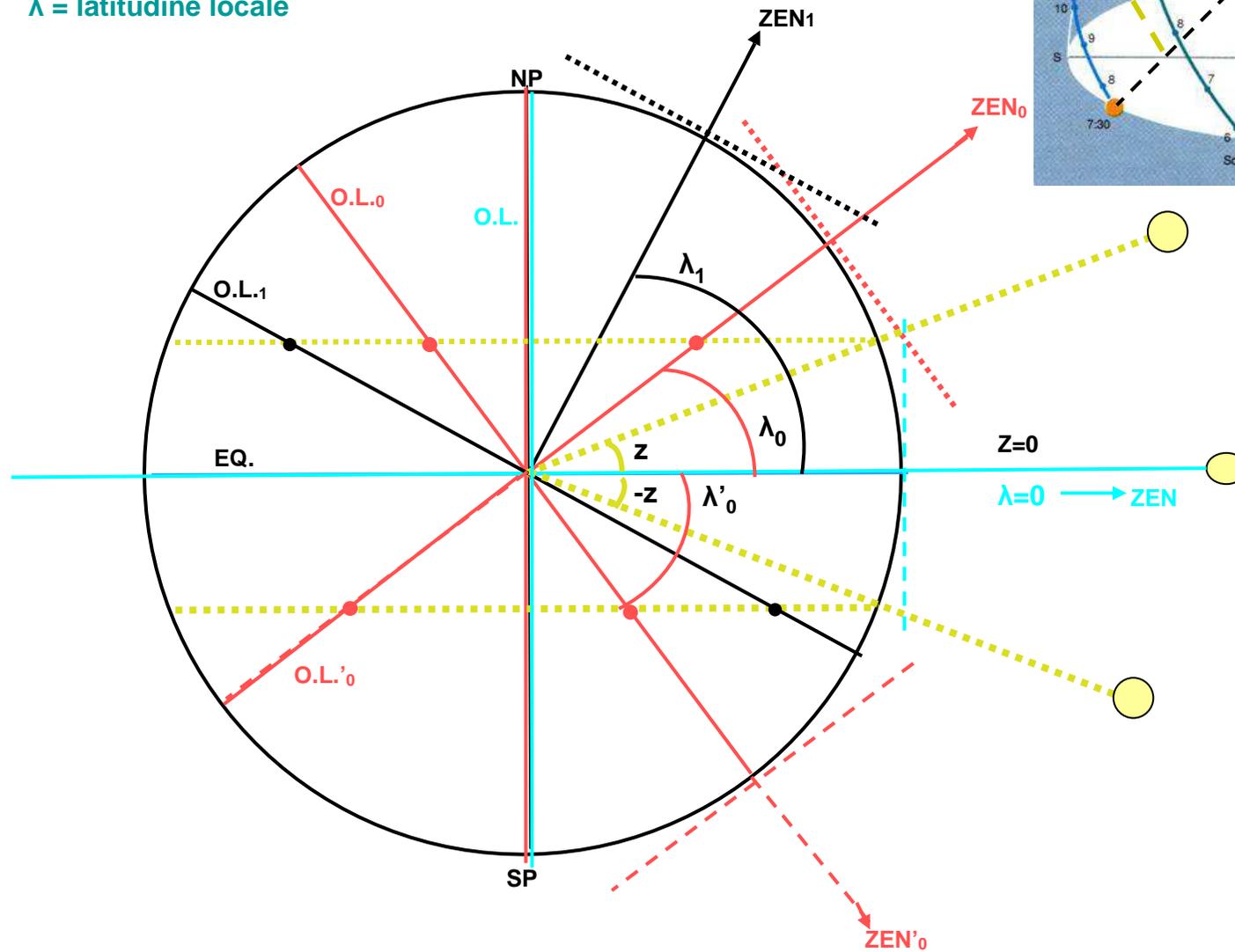


Figura 2

Dalla figura 2 si rileva che la declinazione del sole individua un parallelo chiamato Parallelo Solare.

Il parallelo solare rappresenta il percorso del sole nelle 24 ore del giorno. Questo percorso si distingue in arco diurno e arco notturno relativamente all'orizzonte locale scelto con la latitudine.

Dato un piano di orizzonte locale (che è tangente alla superficie terrestre nel punto di latitudine ma si fa passare per il centro della terra per comodità di analisi) il parallelo solare lo intersecherà con una retta i cui punti estremi, posti ad E ed W, rappresentano, in scala bidimensionale, da un lato la Levata L (ad E) e dalla parte opposta il Tramonto T (ad W) del sole (v. la corrispondenza con la relativa figura tridimensionale).

E' importante notare nella figura 2 che per valori **positivi della declinazione z** la intersezione del parallelo solare con l'orizzonte locale, qualunque sia la latitudine, avviene sempre nell'emisfero **nord**, mentre per valori **negativi di z** la intersezione avviene sempre nell'emisfero **sud**.

Un'analisi geometrico-matematica eseguita sulla figura 2 potrebbe essere usata per determinare l'ora della Levata e del Tramonto ma non è utile per determinare altri parametri, come Azimuth, Altezza e Angolo orario; per questo è necessario usare una rappresentazione tridimensionale e operare con analisi sferica o con proiezioni sferiche sul piano dell'orizzonte locale.

Si fa uso quindi della **Fig. 2b** adattandola con le proiezioni sferiche opportune.

Per completezza rappresentativa si presenta la **Fig. 2a** per evidenziare alcuni parametri che saranno oggetto ed utili per il calcolo:

r = raggio del parallelo solare; **O'** = centro del parallelo solare; **O** = centro dell'orizzonte locale e del polo nord;

t = angolo orario generico dell'arco solare;

Hmx = altezza massima dell'arco solare sopra l'orizzonte locale alla culminazione

H = altezza generica dell'arco solare sopra l'orizzonte locale; **Az** = angolo di Azimuth generico dell'arco solare;

Pr = proiezione dell'arco solare diurno sull'orizzonte locale

Meridiano locale passante per lo Zenith; PN asse polo nord; Zenit dell'orizzonte locale.

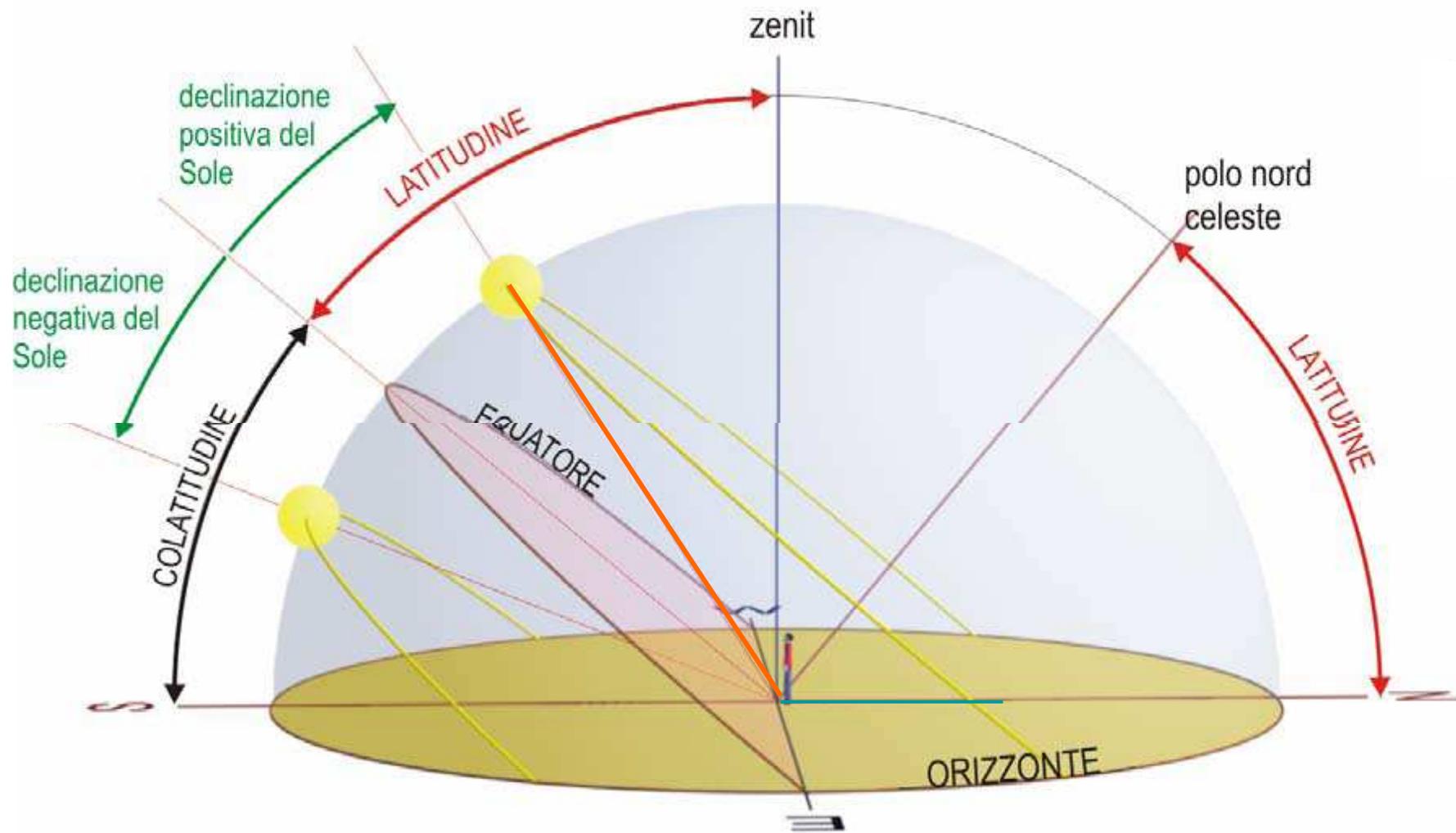


Fig. 2b

$Az = \arccos(\sin z / \cos \lambda)$; $0^\circ \leq Az \leq 180$; $\alpha = \arcsin(\sin Az / \cos z)$;
 $L = \alpha / 15h - \Theta + \Delta F + ET$; $\Theta =$ longitudine in ore; $ET =$ equazione del tempo;
 $T = 24h - \alpha / 15h - \Theta + \Delta F + ET$; $\Delta F =$ fuso orario.

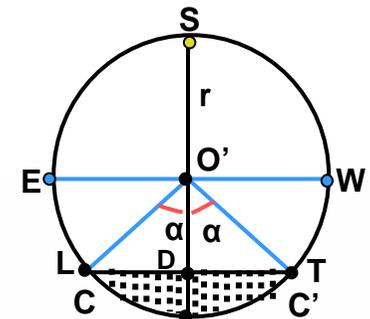


Fig. 3 Parallelo di declinazione z con levata e tramonto

Analisi matematica n. 1

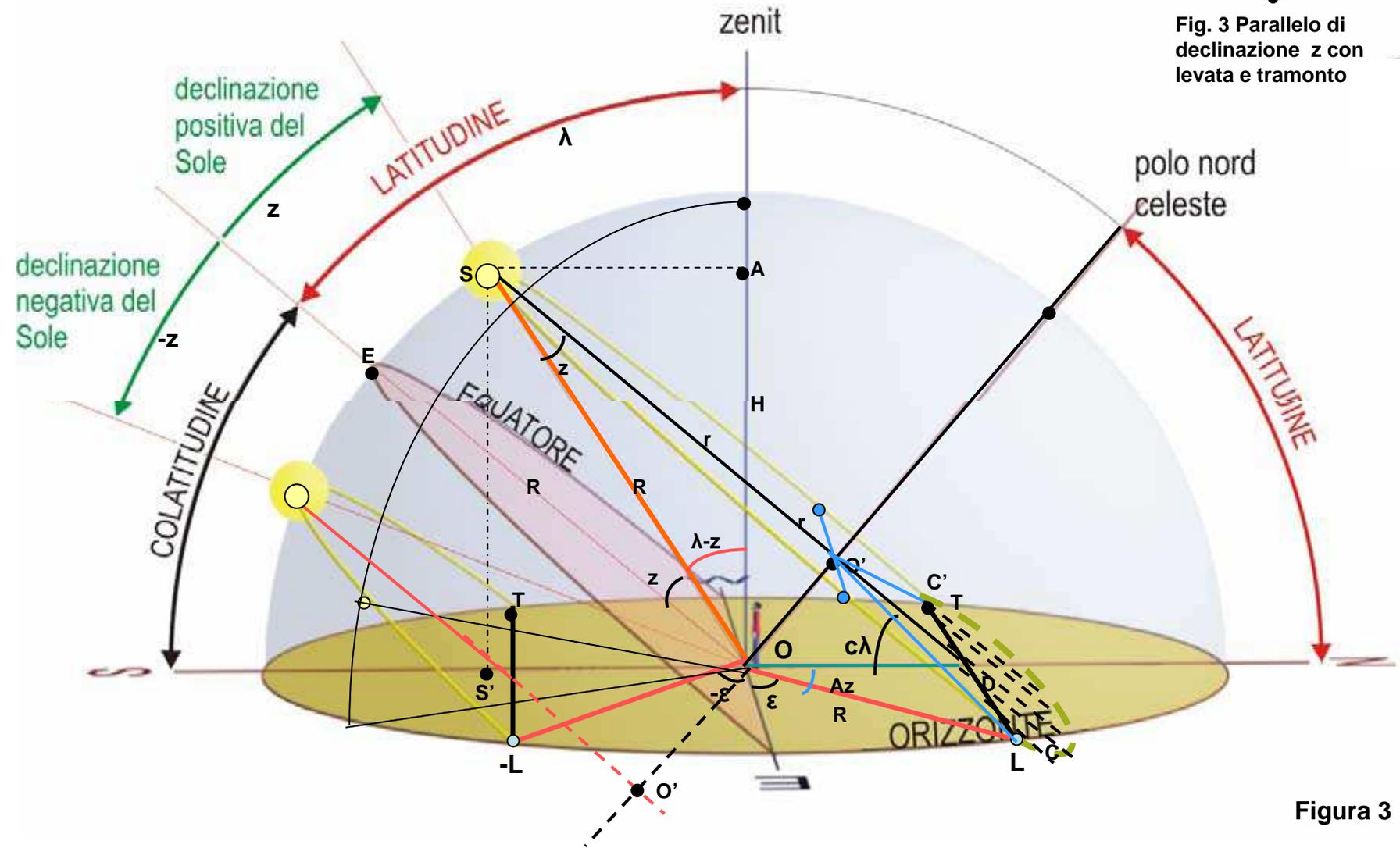


Figura 3

Analisi matematica n. 1 della formula per il calcolo dell'angolo dell'azimuth, del sorgere e del tramonto del sole

Riferimento figura 3.

L'analisi ed il calcolo vengono eseguiti considerando la intersezione tra il piano dell'orizzonte locale ed il parallelo solare che rappresenta il percorso sia dell'arco diurno che di quello notturno del sole.

Valutando l'intersezione si ricava l'angolo di azimuth (e quindi del sorgere e del tramonto) e quindi il tempo della levata e del tramonto.

Come definito, l'azimuth **Az** è riferito all'angolo compreso fra la direzione Nord dell'orizzonte locale e la levata **L** o il tramonto **T** e varia fra 0° e 180° .

Angolo Azimuth di levata L e di tramonto T

$$OS' = AS = R \sin(\lambda - z);$$

$O'S = r = R \cos z$; raggio del parallelo solare di declinazione z percorso del sole;

$$H = OA = SS' = R \cos(\lambda - z) = SD \sin(c\lambda) = SD \sin(\pi/2 - \lambda) = SD \cos \lambda;$$

$$SD = R \cos(\lambda - z) / \cos \lambda;$$

$$SD \cos(c\lambda) = SD \cos(\pi/2 - \lambda) = SD \sin \lambda = OS' + OD; \quad OS' = AS = R \sin(\lambda - z);$$

$$OD = -OS' + SD \sin \lambda = -R \sin(\lambda - z) + R \sin \lambda \cos(\lambda - z) / \cos \lambda;$$

$OD = R \cos Az = -R \sin(\lambda - z) + R \sin \lambda \cos(\lambda - z) / \cos \lambda$; risolvendo questa equazione si ottiene:

$$\cos Az = -\sin(\lambda - z) + \sin \lambda \cos(\lambda - z) / \cos \lambda = [-\cos \lambda (\sin \lambda \cos z - \cos \lambda \sin z) + \sin \lambda (\cos \lambda \cos z + \sin \lambda \sin z)] / \cos \lambda =$$

$$[-\cos \lambda \sin \lambda \cos z + \cos^2 \lambda \sin z + \sin \lambda \cos \lambda \cos z + \sin^2 \lambda \sin z] / \cos \lambda = [\cos^2 \lambda \sin z + \sin^2 \lambda \sin z] / \cos \lambda = \sin z / \cos \lambda$$

da cui:

$$\cos Az = \sin z / \cos \lambda;$$

$$Az = \arccos(\sin z / \cos \lambda)$$

$$0^\circ \leq Az \leq 180$$

Si può risolvere anche rispetto all'angolo ϵ , scostamento rispetto alla direzione E (levata) o W (tramonto). Essendo $Az = 90^\circ - \epsilon$; $\cos Az = \cos(90^\circ - \epsilon) = \sin \epsilon$ da cui:

$$\begin{array}{lll} \text{sen } \epsilon = \text{sen } z / \cos \lambda; & \epsilon = \arcsen(\text{sen } z / \cos \lambda) & -90^\circ \leq \epsilon \leq 90^\circ \\ \cos Az = \text{sen } z / \cos \lambda; & Az = \arccos(\text{sen } z / \cos \lambda) & 0^\circ \leq Az \leq 180 \end{array}$$

Per simmetria rispetto alla direzione Nordi i due angoli di L e di T, sia espressi in **Az** che in ϵ , sono uguali.

Vediamo come e quale è il range di variazione di **Az e di ϵ** .

Qualunque sia la latitudine λ di un orizzonte locale, il range sia di Az che di ϵ dipende unicamente dal range di z.

Dato il piano di un orizzonte locale, cioè una latitudine λ , sia Az che ϵ dipendono, nel periodo di un anno solare, soltanto dal valore di z, come si può dedurre dalle formule.

Per $z = 0^\circ$ **Az=90°**; $z > 0^\circ$ **Az < 90°**; $z < 0^\circ$ **Az > 90°**;

Per $z = 0^\circ$ **$\epsilon = 0^\circ$** ; $z > 0^\circ$ **$\epsilon > 0^\circ$** ; $z < 0^\circ$ **$\epsilon < 0^\circ$** ;

Dalla figura 2, con un poco di fantasia tridimensionale, si può dedurre questo.

Tempo di levata **L** e di tramonto **T**

Nella figura 4 è riportata una rappresentazione piana e tridimensionale del parallelo solare all'equinozio che interseca l'orizzonte locale nei punti **CDC'**(vedi Fig. 3). L'arco diurno e quello notturno sono compresi tra **L** (C) e **T** (C'); l'arco notturno è tratteggiato.

L'intersezione determina l'angolo α che è contenuto solo sul piano del parallelo solare.

Esso si riferisce soltanto alla levata **L** ed al tramonto **T** e diviso per **15** permette il calcolo del tempo in ore di questi eventi. Infatti percorrendo il sole il suo arco di 360° in 24 ore ($360/24=15$), percorre 15 gradi in un'ora.

La intersezione del parallelo solare col piano dell'orizzonte locale dipende dal valore della declinazione z e della latitudine dell'orizzonte locale, per cui le posizioni di L e di T si possono dedurre anche dal disegno di figura 2.

$CD = C'D = R \sin Az = r \sin \alpha = R \cos z \sin \alpha$; (particolare della Fig.3; vedi anche Fig. 2)

$$\sin \alpha = \sin Az / \cos z; \quad \alpha = \arcsin (\sin Az / \cos z);$$

Si osservi in conclusione che sia la latitudine λ , con cui si individua l'orizzonte locale, sia la declinazione del sole z , con cui si individua il parallelo solare, determinano gli angoli **Az** di azimuth ed quindi α .

Conoscendo la variazione di **Az** $0^\circ \leq Az \leq 180^\circ$ e di z $-23,45^\circ \leq z \leq +23,45^\circ$ il $\sin \alpha$ è sempre positivo, quindi per stabilire il valore di α bisogna valutare z tenendo presente che z non supera mai in valore assoluto $23,45^\circ$

$$\text{per } z = 0^\circ \quad \alpha = 90^\circ; \quad \text{per } 0 < z < 23,45^\circ \quad 0 < \alpha < 90; \quad \text{per } 0 > z > -23,45^\circ \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ;.$$

La formula che ricava l'ora di L e T è:

$$L = \alpha/15h; \quad T = 24h - \alpha/15h$$

Per. $z = 0^\circ \quad \alpha = 90^\circ$ L = ore 6; T = ore 18; equinozi

Per. $0 < z < 23,45^\circ \quad 0 < \alpha < 90$ L < ore 6; T > ore 18; equinozio \rightarrow solstizio d'estate

Per. $0 > z > -23,45^\circ \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ$ L > ore 6; T < ore 18; equinozio \rightarrow solstizio d'inverno.

Il risultato dei calcoli deve però essere confrontato coi corrispondenti valori ricavati da un qualsiasi simulatore astronomico (planetario) che sarà posizionato su un orizzonte locale scelto con la latitudine del luogo.

Si tenga in conto che le formule, così espresse, sono riferite agli orari locali mentre il planetario dà gli orari riferiti alla **longitudine**, al **fuso orario** del luogo rispetto al **UTC o GMT** ed alla equazione del tempo **ET**.

Per la longitudine (positiva verso Est, negativa verso Ovest) si usa il simbolo **Θ** espressa in ore, per il fuso orario il simbolo **ΔF**, espresso in ore, e per l'equazione del tempo il simbolo **ET**

Quindi le formule finali da applicare sono:

$$L = \alpha/15h - \Theta + \Delta F + ET; \quad T = 24h - \alpha/15h - \Theta + \Delta F + ET;$$

Si ricordi il range di appartenenza di α nell'applicare le formule.

I calcoli ed il risultato del confronto sono eseguiti in fogli Excel mentre qui sono riportati i valori calcolati ed i grafici del confronto finale.

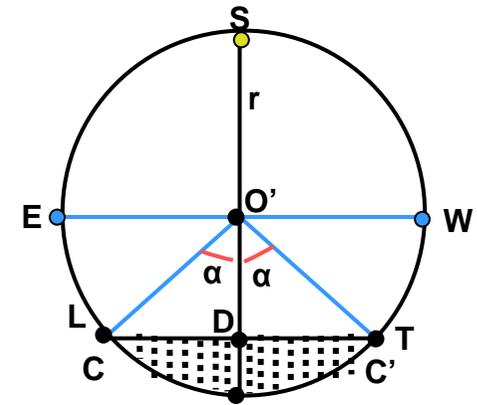
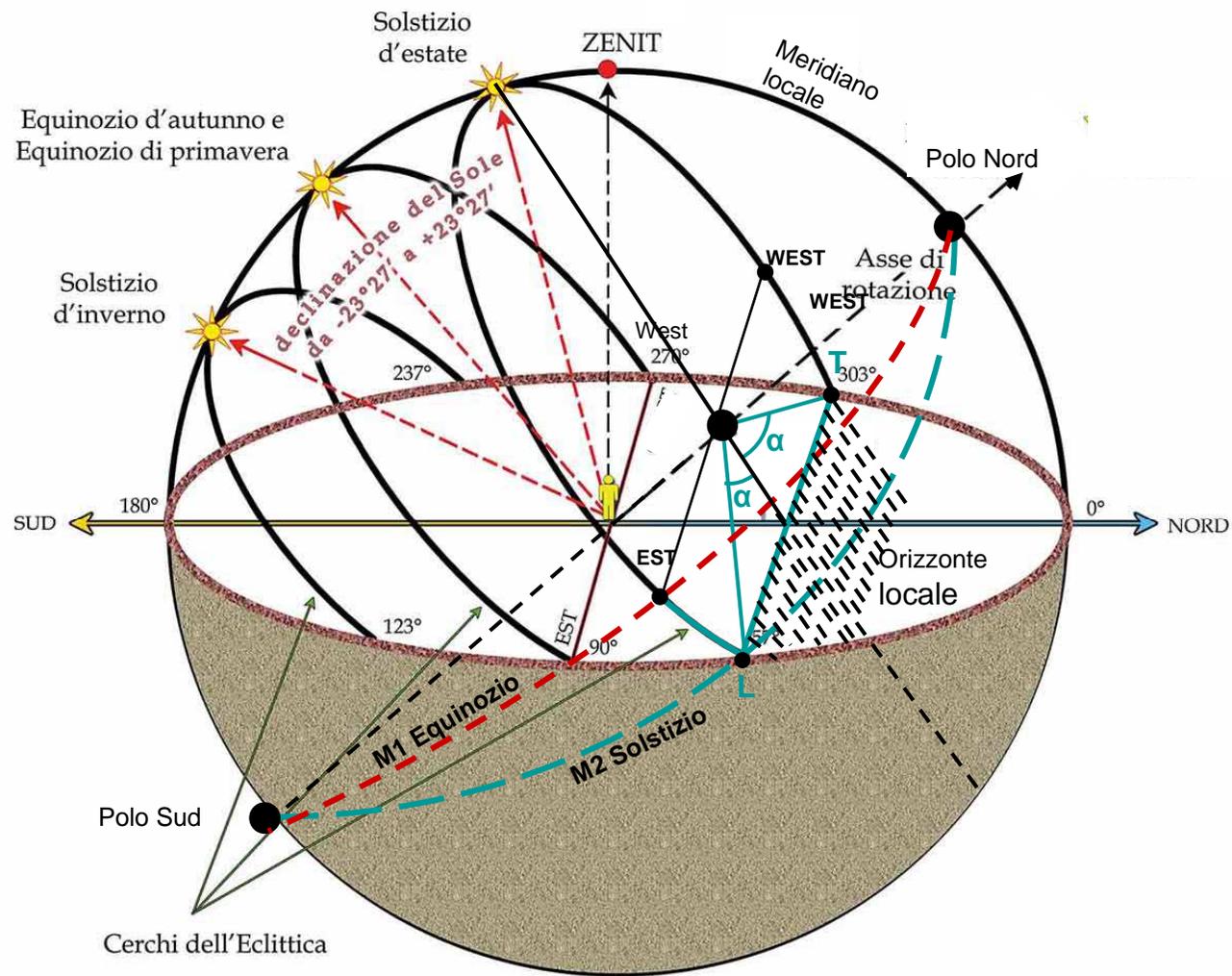


Fig. 4 Parallelo di declinazione z con levata e tramonto

Fig. 4 Intersezione del parallelo solare al solstizio d'estate con orizzonte locale nei punti di levata L e di tramonto T con evidenziato l'angolo α .

Analisi matematica n. 2 della formula per il calcolo del sorgere,
della culminazione, dell'altezza, dell'angolo orario, dell'azimuth e del tramonto del sole

Riferimento figura 5.

z =declinazione del sole; λ =latitudine del luogo(orizzonte locale); τ =angolo orario; H =altezza del sole

A qualunque altezza **H** si trovi il sole nel corso del giorno vi corrisponde un **angolo orario τ** valutato sul parallelo solare riferito al suo centro.

L'altezza **H** definisce quindi : **il sorgere del sole con $H=0$,**
la culminazione o transito sul meridiano locale (ore 12:00 solari locali)
con H_{mx} altezza massima a $\tau = 0$;
il tramonto con $H = 0$..

In più **H** è funzione della latitudine del luogo e della declinazione del sole oltre che dell'angolo orario τ .

Quindi **H** è una funzione di **z, λ , τ** cioè **$H = f(z, \lambda, \tau)$** ; si preferisce relazionare invece che l'altezza **H** l'angolo \hat{H} che vede l'altezza **H** e la formula diventa: **$\text{sen } \hat{H} = \text{sen } z \text{ sen } \lambda + \text{cos } z \text{ cos } \lambda \text{ cos } \tau$**

La figura 5 permette di calcolare questa formula.

$r = R \cos z$; raggio del parallelo di declinazione z ; lungo questo parallelo, detto **parallelo solare**, si sposta il sole descrivendo il suo arco diurno e notturno.

$$b+b' = r; \quad b= r \cos \tau; \quad b'= r-r \cos \tau = r(1- \cos \tau) = R \cos z (1- \cos \tau);$$

$A = h + h' = R \cos(\lambda - z)$ altezza del sole alla culminazione al passaggio sul meridiano locale;

$$\begin{aligned} h' = b' \cos \lambda; \quad H = R \text{sen } \hat{H} = A - h' &= R \cos(\lambda - z) - R \cos z (1- \cos \tau) \cos \lambda = \\ & R [\cos(\lambda - z) - \cos z (1- \cos \tau) \cos \lambda] = \\ & R [\text{cos } \lambda \text{ cos } z + \text{sen } \lambda \text{ senz } - \text{cos } z \text{ cos } \lambda + \text{cos } z \text{ cos } \lambda \text{ cos } \tau] = \\ & R [\text{sen } \lambda \text{ senz } + \text{cos } z \text{ cos } \lambda \text{ cos } \tau] \end{aligned}$$

da cui: **$\text{sen } \hat{H} = \text{sen } z \text{ sen } \lambda + \text{cos } z \text{ cos } \lambda \text{ cos } \tau$**

La culminazione si ottiene ponendo **$\tau=0$** per cui: **$\text{sen } \hat{H}_{mx} = \text{sen } z \text{ sen } \lambda + \text{cos } z \text{ cos } \lambda = \text{cos } (\lambda-z)$** ;

L'angolo orario τ , per convenzione, varia da valore negativo al sorgere, a 0 alla culminazione, a valore positivo al tramonto. Tuttavia causa la simmetria dell'arco solare i valori di τ sono in assoluto uguali.

Il calcolo del sorgere e del tramonto si ricava ponendo $\hat{H} = 0$:

$$\cos \tau = - \tan z \tan \lambda; \quad \tau = \arccos (- \tan z \tan \lambda) ;$$

Il valore di τ in ore è dato da: $\tau' = \tau/15$

Essendo la culminazione alle ore 12:00 locali τ' rappresenta la distanza oraria tra le 12:00 locali e la levata L ed il tramonto T, cioè il tempo locale relativo L_L e T_L ;

Il tempo di levata locale è dato da: $L_L = 12 - \tau'$

Il tempo di tramonto locale è dato da: $T_L = 12 + \tau'$

Per calcolare il tempo civile delle **12:00 locali** del fuso **Fc** bisogna considerare la longitudine ed il fuso orario del luogo applicando la seguente formula:

Fc = 12 - θ + ΔF essendo:

θ = longitudine in ore del luogo e ΔF = differenza di fuso orario rispetto al meridiano di **Greenwich**.

Va aggiunto anche che influisce l'equazione del tempo **ET** come già osservato nel procedimento **dell'Analisi matematica n.1**, quindi:

il tempo di levata civile è dato da: $L_c = (12 - \tau') - \theta + \Delta F + ET$

Il tempo di tramonto civile è dato da: $T_c = (12 + \tau') - \theta + \Delta F + ET$

E' possibile calcolare l'azimuth **Az** definito come l'angolo compreso tra il punto cardinale nord e la proiezione del sole sul piano dell'orizzonte locale procedendo in senso orario.

$$OP = R \cos \hat{H}; \quad a = r \sin \tau = R \cos z \sin \tau = OP \sin Az = R \cos \hat{H} \sin Az ;$$

$$\sin Az = \cos z \sin \tau / \cos \hat{H} ; \quad Az = \arcsen (\cos z \sin \tau / \cos \hat{H})$$

L'Azimuth alla levata ed al tramonto si ottiene ponendo $\hat{H} = 0$ e quindi:

$$Az = \arcsen (\cos z \sin \tau)$$

Qualsiasi planetario permette la lettura dell'azimuth **Az**, della altezza \hat{H} , della levata **Lc** e del tramonto **Tc** del sole avendo scelto la posizione dell'orizzonte locale.

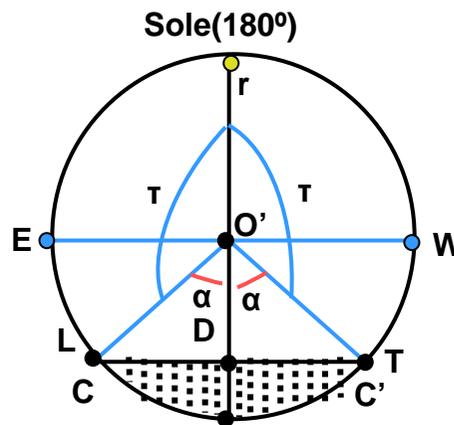


Fig. 5a Relazione fra τ ed α nell'arco del sole alla levata e tramonto

Confronto fra le due Procedure e Conclusioni

Le due analisi matematiche portano a stabilire formule matematiche che sono differenti ma danno un medesimo risultato per i valori delle grandezze che sono d'interesse.

Nei calcoli risultano essere importanti le seguenti variabili in funzione della analisi matematica usata:

α che limita le parti notturna e diurna dell'arco per l'analisi N.1;

τ che rappresenta l'angolo orario e quindi la parte diurna dell'arco per l'analisi N.2.

Fra queste due variabili esiste una relazione che non dipende del segno della declinazione z del sole e che permette di passare da una analisi all'altra alle medesime condizioni e di verificare la uguaglianza delle corrispondenti grandezze ottenute.

in angoli: $\alpha = 180 - \tau$; in tempo ore: $\alpha/15 = 12 - \tau/15$;

Si ricorda che queste relazioni valgono solo negli eventi levata e tramonto del sole (vedi Fig. 5a).

Nella figura 6 sono riportati i valori della Levata calcolati con analisi N.1 (L1) e analisi N.2 (L2), che risultano uguali, e quelli rilevati da planetario **HNSKY** corretti con la rifrazione.

La differenza tra i valori calcolati con la due formule e quelli ricavati da HNSKY è riportata nei grafici della figura 7 che mettono in evidenza questa uguaglianza di risultati.

Sono anche riportati i valori numerici di queste differenze che si attestano fra 4 e 6 minuti.

Questi calcoli sono riportati in fogli excel fuori testo.

Non sono stati riportati i confronti fra le altre grandezze che possono facilmente essere calcolate mediante le formule riportate ed organizzate in fogli excel.

data 2011	L1	L2	HNSKY
21-dic	8.05.56	8:05:56	8.00.00
30-dic	8.08.55	8:08:55	8.03.00
15-gen	8.05.15	8:05:15	8.00.00
30-gen	7.52.12	7:52:12	7.47.00
15-feb	7.30.27	7:30:27	7.26.00
28-feb	7.08.45	7:08:45	7.05.00
15-mar	6.41.08	6:41:08	6.36.00
21-mar	6.29.57	6:29:57	6.24.00
30-mar	6.12.39	6:12:39	6.07.00
15-apr	5.43.13	5:43:13	5.38.00
30-apr	5.18.29	5:18:29	5.13.00
15-mag	4.58.25	4:58:25	4.53.00
30-mag	4.45.03	4:45:03	4.40.00
15-giu	4.39.54	4:39:54	4.34.00
21-giu	4.40.29	4:40:29	4.35.00
30-giu	4.43.48	4:43:48	4.38.00
15-lug	4.54.46	4:54:46	4.49.00
30-lug	5.10.11	5:10:11	5.05.00
15-ago	5.28.57	5:28:56	5.24.00
30-ago	5.46.59	5:46:59	5.42.00
15-set	6.06.18	6:06:18	6.01.00
23-set	6.15.35	6:15:35	6.11.00
30-set	6.24.47	6:24:47	6.20.00
15-ott	6.44.12	6:44:12	6.39.00
30-ott	7.04.46	7:04:46	6.59.00
15-nov	7.27.22	7:27:22	7.22.00
30-nov	7.47.05	7:47:05	7.41.00
15-dic	8.02.03	8:02:03	7.56.00

Figura 6

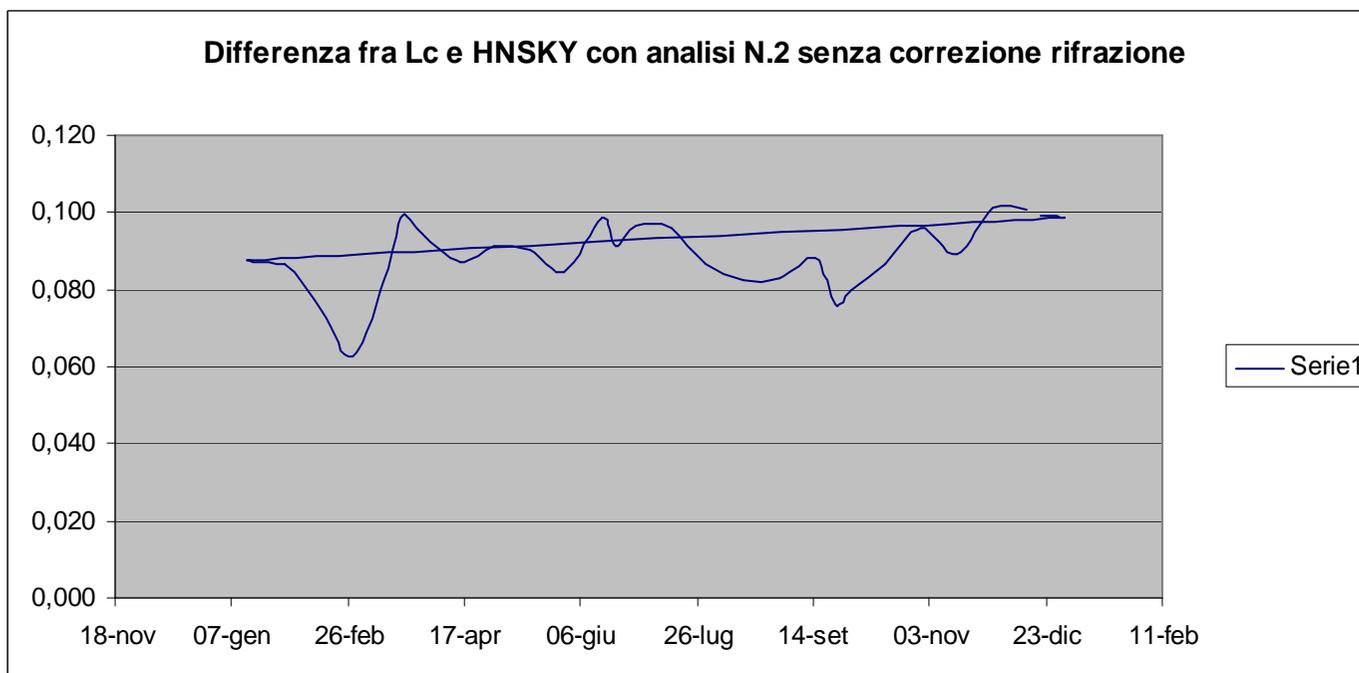
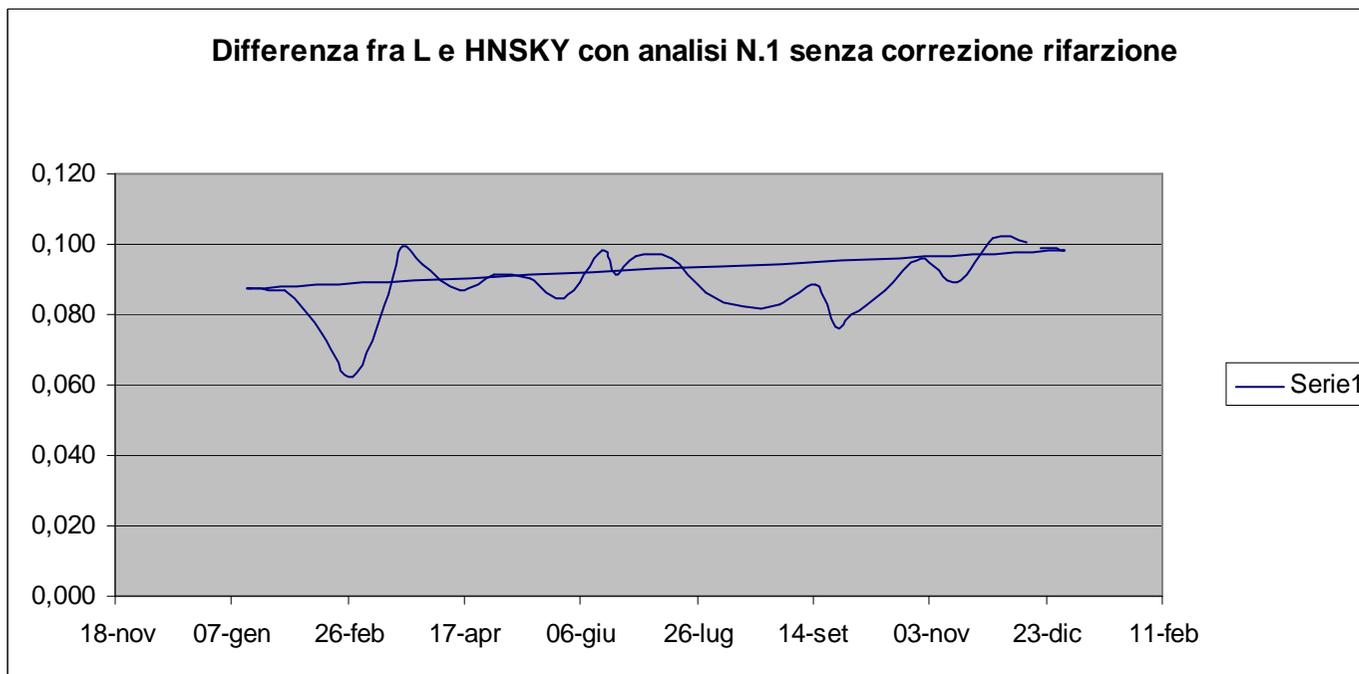
Coordinate orizzonte locale: latitudine $\lambda = 45,464^{\circ}$;
longitudine $\Theta = 9,15^{\circ}$.

L 1 = levata con analisi N.1

L 2 = levata con analisi N.2

HNSKY = levata da planetario HNSKY con rifrazione

Figura 7



0.05.56

0.05.55

0.05.15

0.05.12

0.04.27

0.03.45

0.05.08

0.05.57

0.05.39

0.05.13

0.05.29

0.05.25

0.05.03

0.05.54

0.05.29

0.05.48

0.05.46

0.05.11

0.04.56

0.04.59

0.05.18

0.04.35

0.04.47

0.05.12

0.05.46

0.05.22

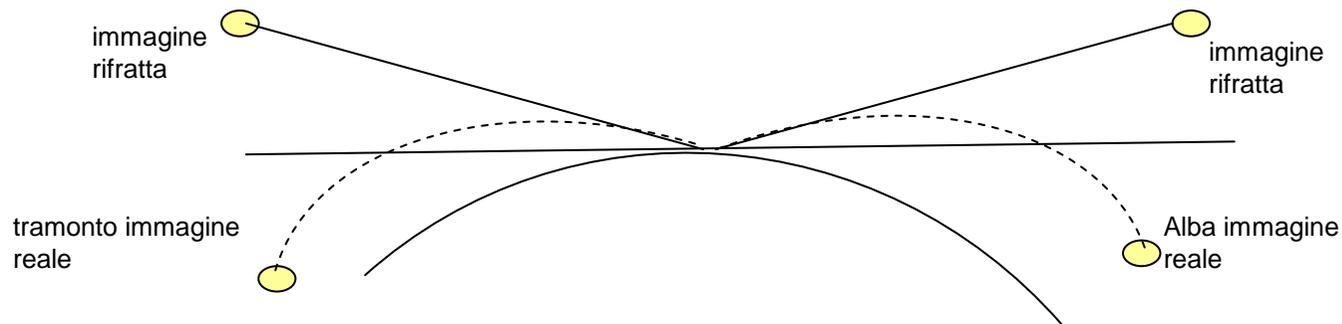
0.06.05

0.06.03

Fattori che influenzano il rilievo reale.

Il calcolo eseguito si basa su un'analisi puramente geometrica e non tiene in conto:

1. lo schiacciamento ai poli della terra che può essere trascurato;
2. il diametro del sole che lo fa apparire come un disco e non come un punto; per questo sia al sorgere che al tramonto si considera l'apparizione del bordo superiore del sole; il disco totale del sole si estende per 3,6 4,0 minuti;
3. la rifrazione dell'atmosfera terrestre che incurva i raggi del sole facendolo apparire più in alto che non in realtà come è schematizzato nella figura seguente.



L'effetto della rifrazione nelle formule può essere introdotto con un termine correttivo che comporta una diminuzione del tempo di levata ed un aumento del tempo di tramonto.

I valori ricavati dal planetario HNSKY sono ottenuti impostando l'effetto rifrazione (che è effettivamente quello che l'osservatore percepisce osservando il sole) e quindi risultano inferiori a quelli calcolati geometricamente, come si può notare nella figura 6.

Il termine correttivo è disponibile ed introdotto nella formula dell'analisi N.2 per cui il τ diventa:

$$\tau = \arccos \left(\frac{-0,01454 + \sin \lambda}{\cos z \cos \lambda} \right) = \arccos \left(\frac{-0,01454}{\cos z \cos \lambda} + \tan z \tan \lambda \right)$$

La variabile τ subisce, quindi, un incremento che determina, a sua volta, una riduzione dei tempi di levata ed un aumento dei tempi di tramonto permettendo una comparazione paritetica coi valori di HNSKY.

Tenendo conto della relazione esistente fra le variabili α e τ la correzione viene applicata anche all'analisi N.1 producendo gli stessi risultati dell'analisi N.2 evidenziati nella figura 8.

Avendo introdotto la correzione con la rifrazione i valori trovati coincidono con quelli di HNSKY.

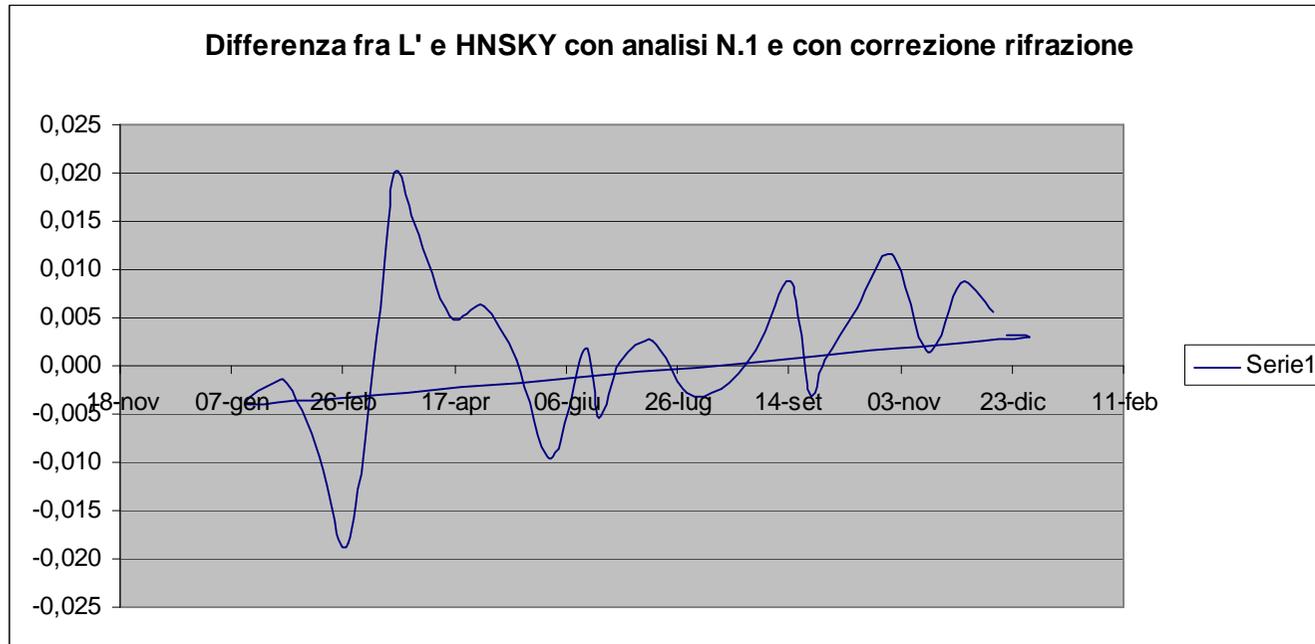
Tuttavia nei grafici della figura 9 sono anche riportate numericamente le differenze fra i valori ottenuti dal calcolo corretto con la rifrazione e quelli ricavati dal planetario HNSKY (con rifrazione).

data 2011	L'1	L'2	HNSKY
21-dic	8.00.12	8.00.12	8.00.00
30-dic	8.03.11	8.03.12	8.03.00
15-gen	7.59.46	7.59.44	8.00.00
30-gen	7.46.55	7.46.57	7.47.00
15-feb	7.25.26	7.25.28	7.26.00
28-feb	7.03.54	7.03.54	7.05.00
15-mar	6.36.22	6.36.22	6.36.00
21-mar	6.25.12	6.25.12	6.24.00
30-mar	6.07.53	6.07.53	6.07.00
15-apr	5.38.19	5.38.19	5.38.00
30-apr	5.13.22	5.13.22	5.13.00
15-mag	4.53.02	4.53.02	4.53.00
30-mag	4.39.26	4.39.26	4.40.00
15-giu	4.34.07	4.34.07	4.34.00
21-giu	4.34.41	4.34.41	4.35.00
30-giu	4.38.02	4.38.02	4.38.00
15-lug	4.49.09	4.49.09	4.49.00
30-lug	5.04.50	5.04.50	5.05.00
15-ago	5.23.52	5.23.52	5.24.00
30-ago	5.42.06	5.42.06	5.42.00
15-set	6.01.32	6.01.32	6.01.00
23-set	6.10.50	6.10.50	6.11.00
30-set	6.20.02	6.20.02	6.20.00
15-ott	6.39.22	6.39.21	6.39.00
30-ott	6.59.42	6.59.44	6.59.00
15-nov	7.22.05	7.22.04	7.22.00
30-nov	7.41.31	7.41.32	7.41.00
15-dic	7.56.20	7.56.20	7.56.00

Figura 8

Coordinate orizzonte locale: latitudine $\lambda = 45,464^{\circ}$;
longitudine $\Theta = 9.15^{\circ}$.
L'1 = levata con analisi N.1 corretta con rifrazione
L'2 = lavata con analisi N.2 corretta con rifrazione
HNSKY = levata da planetario HNSKY con rifrazione

Figura 9



0.00.11

0.00.11

0.00.14

0.00.04

0.00.32

0.01.05

0.00.22

0.01.12

0.00.54

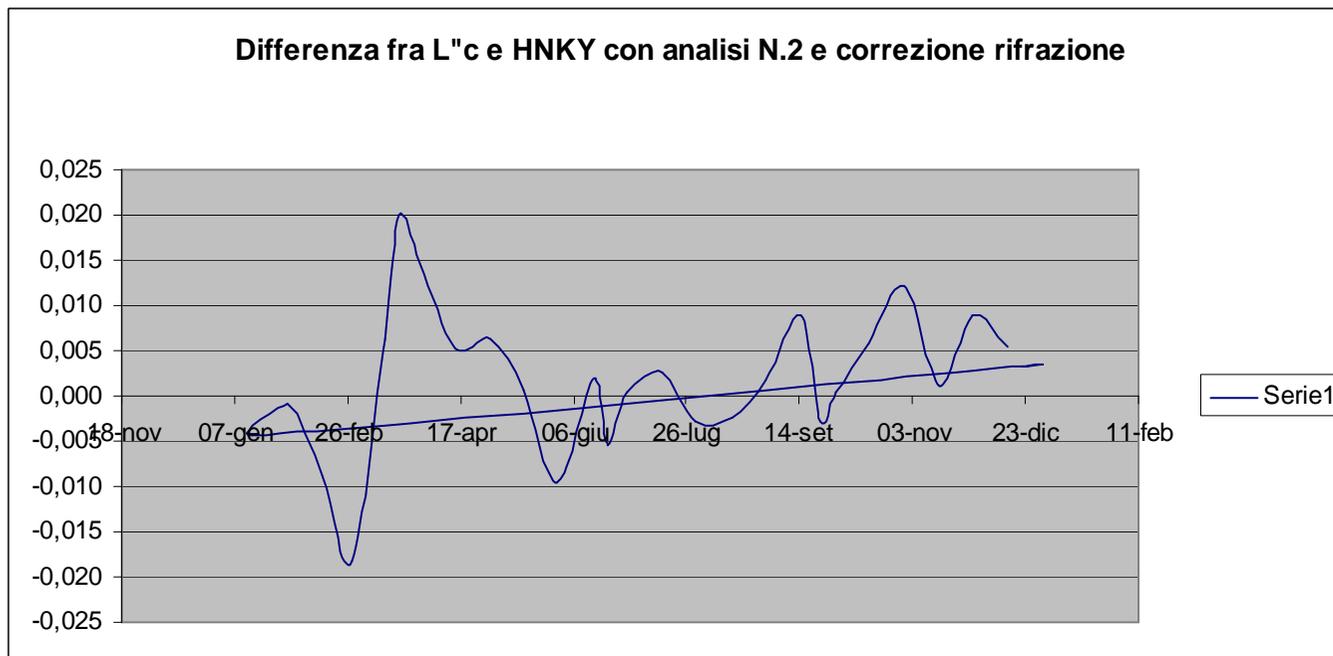
0.00.18

0.00.22

0.00.04

0.00.36

0.00.07



0.00.18

0.00.00

0.00.11

0.00.11

0.00.07

0.00.07

0.00.32

0.00.11

0.00.00

0.00.22

0.00.43

0.00.04

0.00.32

0.00.18

Considerazioni su orizzonti locali, circoli polari, levata e tramonto del sole

Nella figura 10 sono tracciate sulla sfera terrestre alcune linee diametrali che rappresentano gli orizzonti locali a diverse latitudini, i paralleli solari a diverse declinazioni z , i tropici ed i circoli polari.

La linea direzione del sole giace sulla eclittica **ECL** che è fissa.

La figura della sfera può essere ruotata realizzando con l'equatore diverse declinazioni z del sole, dal **T.Can.(+23,47°)** al **T.Capr.(-23,47°)**.

Infatti ruotando secondo $-\lambda$ l'equatore si sposta dando valori negativi a z , mentre l'opposto avviene ruotando secondo $+\lambda$.

Per ogni declinazione la intersezione della linea **ECL** con la sfera terrestre determina il **parallelo solare** lungo il quale si muove il sole con quella declinazione realizzando l'arco diurno e notturno.

L'intersezione del diametro di questo parallelo solare con la proiezione del meridiano degli orizzonti locali (dove il sole raggiunge la culminazione locale, zenit locale) indica la posizione del sorgere e del tramontare del sole sul piano dell'orizzonte locale (vedi Fig. 4).

Il **circolo polare artico** segna il confine meridionale (la minore latitudine) per il verificarsi del **giorno polare** al solstizio di giugno e della **notte polare** al solstizio di dicembre.

Infatti l'orizzonte al circolo polare riceve per 24 ore il sole al solstizio di giugno e non riceve luce per 24 ore al solstizio di dicembre.

Per latitudini inferiori non si verificano il giorno e la notte polare.

Il contrario avviene per il **circolo polare antartico**.

Nella zona polare, per latitudini maggiori del circolo polare artico, il sole rimane sopra l'orizzonte in estate per più di 24 ore (**sole di mezzanotte**) mentre in inverno rimane sotto orizzonte per più di 24 ore (**notte polare**).

Analizzando la figura 10 nei punti d'intersezione si possono dedurre le varie situazioni che si verificano sulla levata, il tramonto ed i tempi di luce del sole sugli orizzonti locali in funzione della declinazione e della latitudine.

Le formule prima sviluppate permettono il calcolo preciso.

Deduzione e caratteristiche dei circoli polari artico ed antartico

In funzione della declinazione (supposta qualsiasi da 0° a $\pm 90^\circ$ in linea teorica) si può calcolare quale è la latitudine minima ($\pm \lambda_0$) sul cui orizzonte locale il sole di mezzanotte è visibile ad altezza 0 dal bordo e non tramonta mai lungo l'arco solare, cioè il parallelo solare risulta in contatto col suolo dell'orizzonte locale nella zona della mezzanotte; praticamente il punto di **L** e di **T** coincidono e l'angolo $\alpha=0$ (v. figura 4).

La condizione è: $\lambda_0=90^\circ \pm z$

Infatti se nella figura 3 (v. anche figura 12) si impone la condizione che OD sia uguale a R per cui:

$$OO' = R \operatorname{sen} z = OD \operatorname{sen}(c\lambda); \quad OD = R \operatorname{sez} / \operatorname{sen}(c\lambda) = R; \quad \operatorname{senz} = \operatorname{sen}(c\lambda); \quad z = (c\lambda) = 90^\circ - \lambda;$$

$$\lambda_0 = 90^\circ - z$$

Imponendo la nota limitazione per $z = \pm 23,47^\circ$

al solstizio d'estate $z = 23,47^\circ$ $\lambda_0 = 90 - z = 66,53^\circ$ corrisponde il

[circolo polare artico.](#)

al solstizio d'inverno $z = -23,47^\circ$ $\lambda_0 = 90 + z = 113,47$ corrisponde a $\lambda_0 = -66,53^\circ$ cioè il

[circolo polare antartico](#)

Ai solstizi d'estate e d'inverno per valori della latitudine λ_1 superiori a λ_0 (**zona polare nord e sud**) il sole sarà sempre presente per tutta la durata delle 24 ore sull'orizzonte locale e l'angolo della sua altezza alla mezzanotte è dato dalla :

$$\hat{H} = \lambda_1 - \lambda_0$$

Le latitudini λ_1 e λ_0 sono da considerare in valore assoluto essendo al nord positive e al sud negative.

Si può osservare che per valori positivi della declinazione, qualunque sia la latitudine, il sorgere ed il tramontare del sole è situato nell'emisfero nord mentre per valori negati nell'emisfero sud.

Significato dei paralleli principali: C.P.Art, C.P.Ant., T.Can., T.Capr.

Il T.Can. ed il T.Capr. sono ottenuti per latitudine rispettivamente $z=23,5^\circ$ e $z= - 23,5^\circ$

Il C.P.Art. ed il C.P.Ant. sono ottenuti con latitudine $\lambda_0=\pm (90-23,5^\circ) = \pm 66,5^\circ$

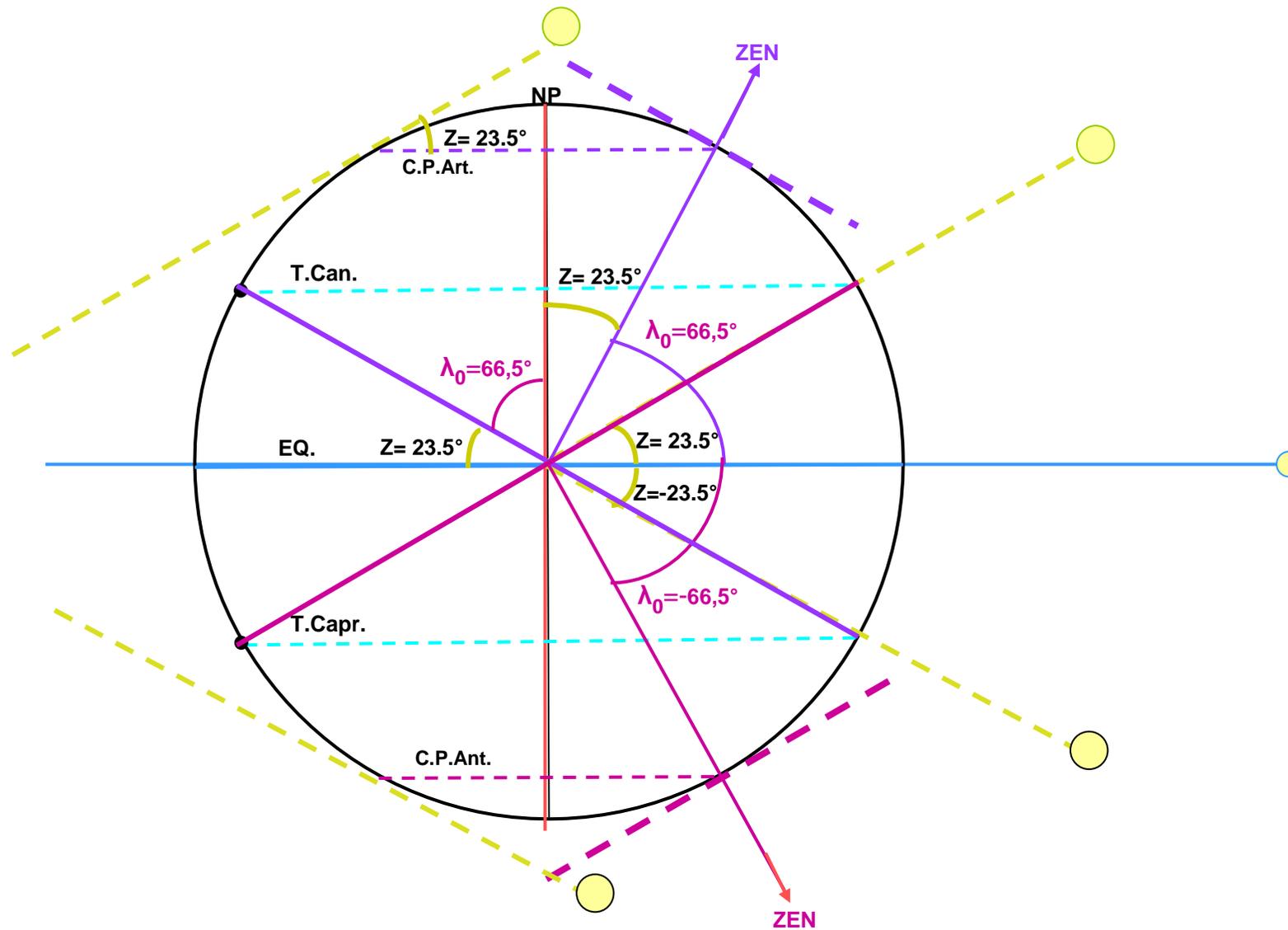


Figura 11

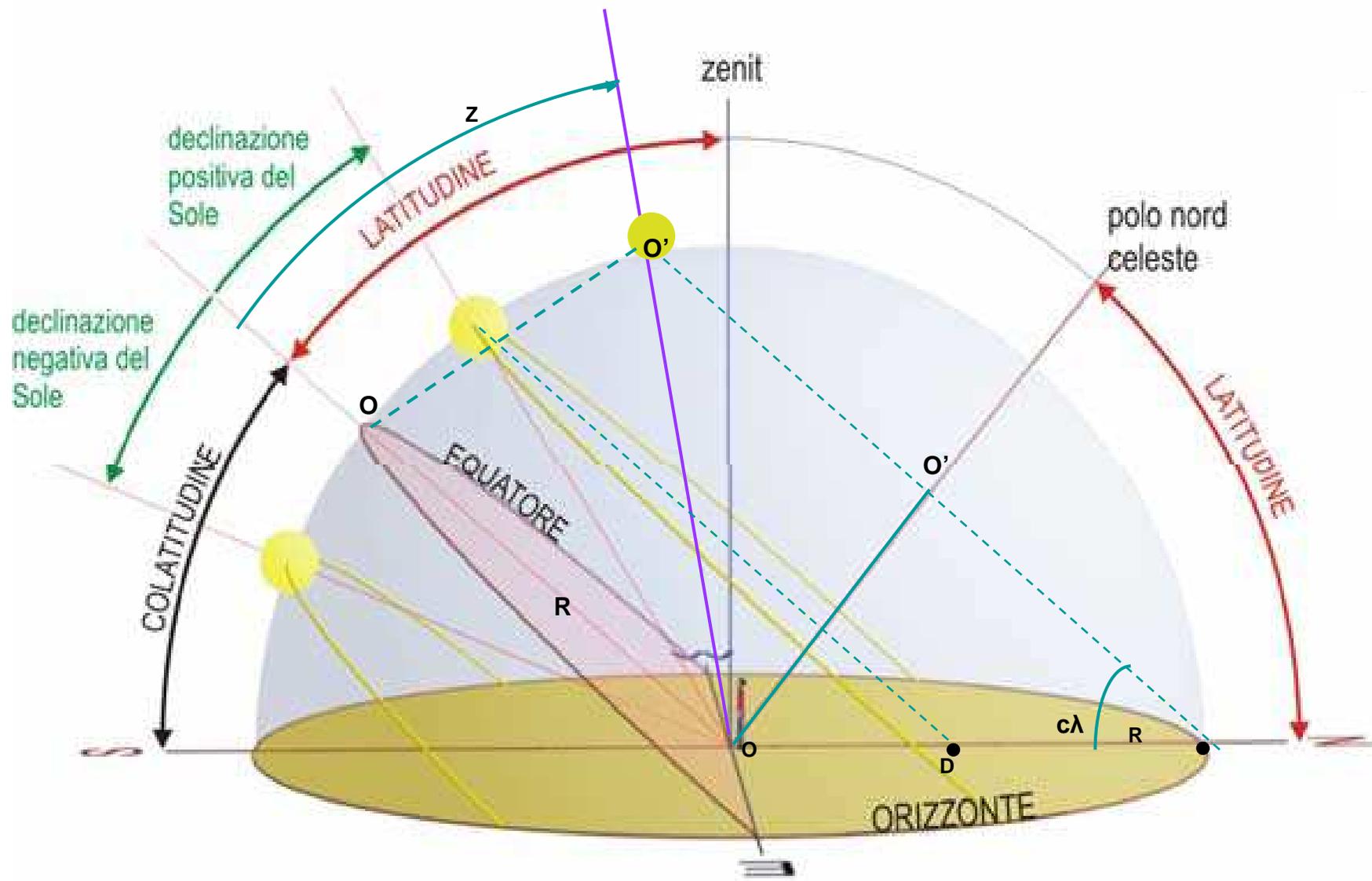


Fig. 12 Rappresentazione per calcolo orizzonti locali ai tropici